Concours de recrutement de professeur des écoles, Avril 2015
Corrigé non officiel de l'épreuve de mathématiques
Groupement académique 1

Première partie (13 points)

A. Calcul de l'aire d'un polygone de Pick sur un exemple

Pour calculer l'aire de ce polygone, nous choisissons de le découper en trois parties : le triangle ABF, le carré BCDF et le triangle rectangle DFE.

Les aires de ces figures, en unités d'aire sont respectivement : $\dfrac{5\times 4}{2}$, 5×5 et $\dfrac{5\times 5}{2}$

L'aire totale du polygone mesure donc 10 + 25 + 12,5 soit 47,5 *ua.*

B. Utilisation de la formule de Pick sur un exemple

1. 37 points du réseau sont situés à l'intérieur du polygone ABCDEF, et 23 points sont sur son bord.

La formule proposée donne donc : $A = 37+\dfrac{23}{2}-1 = 37+11{,}5-1 = 47{,}5$. L'aire de ABCDEF est bien 47,5 *ua* selon cette formule, comme trouvé à la question A.

2. Pour le polygone ABCDF, i = 27 et b = 18 d'où $A_{(ABCDF)} = 27+\dfrac{18}{2}-1 = 27+9-1 = 35$

Pour le triangle DEF, i = 6 et b = 15 d'où $A_{(DEF)} = 6+\dfrac{15}{2}-1 = 6+7{,}5-1 = 12{,}5$

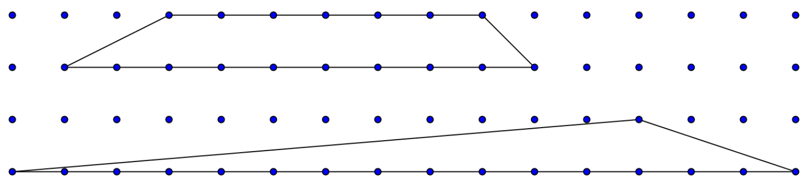
La somme des aires obtenues est bien égale à 47,5 *ua*, valeur trouvée à la question B.1.

C. Quelques conséquences de la formules de Pick.

1. Si b est pair, b/2 est un entier, la formule de Pick consiste alors à additionner deux entiers puis à soustraire un, le résultat est nécessairement un entier, il ne peut pas être égal à 7,5.

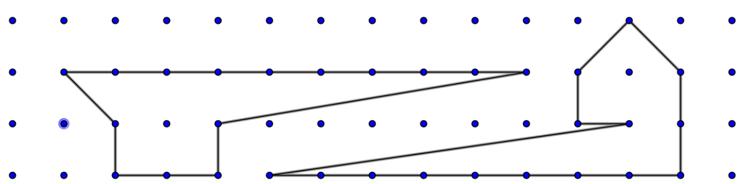
2. Pour une aire donnée, la plus grande valeur de b est obtenue si i = 0 c'est à dire si aucun point du réseau n'est à l'intérieur du polygone. Pour A = 7,5 et i = 0, on obtient $7{,}5 = \dfrac{b}{2}-1$ d'où $8{,}5 = \dfrac{b}{2}$ et $b = 17$

Le trapèze et le triangle ci-dessous sont deux exemples de polygones vérifiant les conditions i = 0 et b = 17 et dont les aires mesurent par conséquent 7,5 *ua*.



3. Dans les conditions fixées, on a A = 7,5 et i = 1 donc $7{,}5 = 1+\dfrac{b}{2}-1 = \dfrac{b}{2}$ d'où $b = 15$.

Les deux polygones ci-dessous vérifient ces conditions.



4. Comme indiqué à la question C.2. la plus grande valeur de b est obtenue pour i = 0, on a alors $A=\frac{b}{2}-1$ d'où $\frac{b}{2}=A+1$ et $b=2A+2$.

Remarque : Nous supposons que seul ce calcul est attendu du candidat, cependant le calcul montre seulement que b ne peut pas être supérieur à 2A+2. Pour montrer que ce nombre est un maximum, il faut prouver qu'il existe une figure ayant bien cette valeur de b. Il est toujours possible de réaliser une telle figure en disposant les points comme nous l'avons fait pour le triangle de la question C.2. Ce sont des points consécutifs d'une même ligne horizontale du réseau, à l'exception de l'un d'entre eux situé sur la ligne immédiatement supérieure.

D. démonstration de la formule de Pick dans le cas du rectangle.

1. Sur le tour du rectangle, il y a autant de points que de segments situés entre deux points consécutifs. Par conséquent *b* est égal au périmètre du rectangle exprimé en *ul* Soit $b = 2L + 2l$.
   Les points intérieurs sont disposés en $l-1$ lignes comportant chacune $L-1$ points. on à donc $i = (l-1)(L-1)$

2. Avec les expressions trouvées à la question précédente de *b* et *i*, calculons $i+\frac{b}{2}-1$.

$$i+\frac{b}{2}-1=(l-1)(L-1)+\frac{2L+2l}{2}-1=L\times l-L-l+1+L+l-1=L\times l$$

ce qui est bien l'aire du rectangle.

Deuxième partie (13 points)

Exercice 1

111 est un multiple de A, donc A est un diviseur de 111, or $111=3\times 37$. 3 et 37 étant premiers, les diviseurs de 111 sont 1, 3, 37 et 111.
La différence A-B étant un multiple de 10 positif ou nul, les valeurs de B possibles sont donc :

Si A = 1 B = 1, ce qui convient puisque 1 est le cube de 1

Si A = 3, B = 3, ce qui ne convient pas puisque 3 n'est pas le cube d'un entier.

Si A = 37, B peut valoir 7, 17, 27 ou 37. Seul 27 (cube de 3) convient.

Si A = 111, B peut valoir 1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91, 101 ou 111. Parmi ces nombres, seul 1 est le cube d'un entier.

Récapitulons. Le problème a trois solutions :
première solution : A = 1 et B = 1
deuxième solution : A = 37 et B = 27
troisième solution : A = 111 et B = 1

Exercice 2

1. Avec 7 litres de liquide on obtient environ 7,5 litres de glace.

2. Pour obtenir 9 litres de glace il faut environ 8,4 litres de liquide.

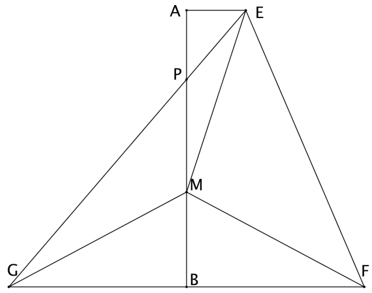
3. Le graphique représentant le volume de glace obtenu en fonction du volume de liquide est un segment de droite passant par l'origine du repère, le volume de glace est donc proportionnel au volume de liquide.

4. Si 10 litres d'eau liquide donnent 10,8 litres de glace, alors 100 litres de liquide fournissent 108 litres de glace, le volume de l'eau augmente donc de 8% en gelant.

5. En 30 jours, le volume d'eau liquide récupérée est de $30 \times 20 m^3$ soit $600 m^3$.

Le volume de glace correspondant est de 8% plus élevé, il est donc de $600 m^3 \times 1{,}08$ soit $648 m^3$ ou encore 648000 litres.

Exercice 3



1. L*a figure ci-contre est une réduction de celle qui vous était demandée, sur laquelle les points M et P ne figuraient pas nécessairement.*

2. Le plus court chemin d'un point à un autre est le segment dont ces points sont les extrémités, par conséquent EM+MG ≥ GE.

Le point P est sur [GE] par conséquent GE = EP + PG, l'inégalité précédente peut donc s'écrire EM+MG ≥ EP + PG.

Dans la symétrie par rapport à la droite (AB), G est le symétrique de F et M, qui est situé sur (AB) est son propre symétrique. Il en résulte que les segments ·[FM] et [GM] sont symétrique et que GM = FM.
En remplaçant MG par MF dans l'inégalité précédente, on obtient EM+MF ≥ EP + PG.

Cette inégalité montre que la plus petite valeur possible de EM + MF est atteinte quand M est placé en P.

3. a) Les points A,P et B sont alignés ainsi que E,P et G. De plus les droites (AE) et (BG) sont parallèles, on peut donc appliquer le théorème de Thalès aux triangles PAE et PBC.

On obtient alors $\dfrac{AP}{BP} = \dfrac{AE}{BG}$ soit $\dfrac{AP}{14 - AP} = \dfrac{3}{9}$

b) On déduit de l'égalité précédente que

$$9AP = 3(14 - AP) \quad d'où \quad 9AP = 42 - 3AP \quad ; \quad 12AP = 42 \quad et \quad AP = \frac{42}{12} = 3{,}5$$

La longueur AP mesure 3,5 cm.

4. Soit H le point de [GH] tel que EHG soit rectangle en H. On peut calculer la longueur EG en appliquant le théorème de Pythagore au triangle EHG.

$$EG^2 = EH^2 + GF^2 = 14^2 + 12^2 = 196 + 144 = 340$$

$$EG = \sqrt{340} \simeq 18{,}4$$

La valeur minimale de EM+MF, égale à EG est de $\sqrt{340}$ cm.
Sa valeur arrondie au dixième de centimètre, est 18,4 cm.

Troisième partie (14 points)

Situation 1

1. Parmi les facteurs pouvant expliquer qu'un élève réussisse l'exercice 2 mais fasse des erreurs dans l'exercice 3 on peut citer :

- La reproduction de la figure par l'élève dans l'exercice 3
- Le fait que l'exercice 2 demande d'associer des nombres à des emplacements déjà fixés, il suffit donc de savoir ranger les fractions données par ordre croissant pour réussir.
- L'utilisation de fractions n'ayant pas toutes le même dénominateur alors que dans l'exercice 2 elles sont toutes données en centièmes.
- La présence de nombres décimaux dans leur écriture à virgule certains ayant un chiffre des centièmes d'autres non.
- Le fait que la graduation ne commence pas à 0 (dans l'exercice B pour placer n centièmes, il suffit de compter n petites graduations).

Remarque : il n'était attendu que trois raisons.

2. À l'école élémentaire, on ne donne pas de définition formelle et générale d'un nombre décimal, ils sont introduits à partir d'exemples comme ceux qui suivent :
On peut indiquer aux élèves que 3,2 signifie $3+\frac{2}{10}$ et que 2,15 signifie $2+\frac{1}{10}+\frac{5}{100}$

Situation 2

1. Lara commet une première erreur en écrivant que $2+\frac{5}{10}+\frac{2}{100}=\frac{252}{1000}$ (au lieu de $\frac{252}{100}$)

Il se peut que cette erreur traduise la conviction qu'une fraction est toujours plus petite que 1. Il se peut aussi qu'elle ait pensé devoir obtenir le nouveau dénominateur par une opération. Comme les dénominateurs utilisés dans ce contexte sont 10, 100 et 1000, la seule opération disponible était $10\times100=1000$

Elle commet une erreur tout à fait analogue sur le deuxième nombre.

Une deuxième erreur est l'écriture 0,252 = 252. (et de même pour le deuxième nombre) Il s'agit probablement d'une maladresse d'écriture signifiant que pour comparer $\frac{252}{1000}$ et $\frac{261}{1000}$ il suffit de comparer 252 et 261 puisque ce sont effectivement ces entiers qu'elle compare ensuite.

2. Clément semble avoir acquis les deux compétences suivantes *(une seule vous était demandée) :*

- Ecrire sous sa forme à virgule un décimal donné sous la forme $a+\frac{b}{10}+\frac{c}{100}$
- Comparer des nombres décimaux à virgule. En effet l'écriture 2,52 - 2,61 = impossible témoigne du fait que Clément sait que 2,52 < 2,61. *(Cette compétence est très discutable, le seul cas où les deux nombres ont autant de chiffres après la virgule ne suffit pas pour savoir si elle est acquise : comment Clément comparerait-il 2,52 et 2,8 ?)*

3. La règle utilisée par Léonie peut s'énoncer ainsi :

Pour comparer deux nombres décimaux ayant la même partie entière, on compare d'abord les chiffres des dixièmes : le nombre le plus grand est celui qui a le plus grand chiffre des dixièmes. C'est seulement si les chiffres des dixièmes sont égaux qu'on compare les chiffres des centièmes.

Situation 3

1. P2 est un problème de partage tandis que P1 et P3 sont des problèmes de groupement.

P1 et P3 relèvent de la division euclidienne (le quotient est par nature un entier) alors que pour P2 il faut utiliser un quotient décimal.
Pour P1, la réponse attendue est le quotient euclidien alors que pour P3, la réponse à la première question n'est pas le quotient euclidien, mais ce quotient plus 1.

2. Plusieurs facteurs peuvent interviennent dans le choix de l'ordre.

Il semble normal de proposer P3 après P1 puisqu'il s'agit de problèmes du même type, mais demandant une interprétation plus subtile pour P3.

P2 diffère tant sur le sens (plutôt plus facile que les deux autres) que sur la technique de calcul (plus difficile puisqu'elle fait intervenir les décimaux) La place qu'on lui donnera dépendra donc de la familiarité des élèves avec les décimaux.

L'ordre proposé par les auteurs semble donc pertinent.

Situation 4

1. La technique utilisée par Adama présente pour avantage une grande concision d'écriture.

La réponse attendue est peut-être que cette technique est plus rapide, cependant, à de rares exceptions près, cette technique combinant mentalement multiplications et soustractions est plus lente que certaines techniques dans lesquelles on pose les soustractions, d'autre part elle conduit à beaucoup d'erreurs.

La technique utilisée par Anaïs a pour avantage de pouvoir facilement être rapprochée du sens de la division (qu'il s'agisse de groupement ou de partage). s'il s'agit par exemple de partager 38792 en 7 les premières étapes montrent que quand on à placé 1000 dans chaque part, il reste 1792 à partager (nombre qui n'apparait pas dans la technique d'Adama. *Par ailleurs, cette technique est « auto corrective », si par exemple on écrit 30 au quotient à la place de 40, il suffira d'ajouter 10 dans une étape ultérieure.*

Bien que le sujet ne le demande pas, signalons tout de même que cette technique est très lourde et pourrait être allégée par exemple en n'écrivant pas de manière exhaustive la table de multiplication par 37, ou en effectuant mentalement l'étape permettant de trouver $50 \times 37 = 1850$ *à partir de* $5 \times 37 = 185$

2. Marie a oublié d'écrire le chiffre 0 au rang des centaines. Son reste intermédiaire étant 1, après avoir « abaissé » un chiffre, elle obtient 17, ce qui est plus petit que le diviseur 37. elle a alors directement abaissé un chiffre de plus. Il peut s'agir d'une utilisation erronée de ce qui se fait dans cette technique pour déterminer le premier chiffre du quotient : on prend des chiffres à gauche du dividende jusqu'à obtenir un nombre plus grand que le diviseur.

Kevin pose une division dans laquelle le reste 63 est plus grand que le diviseur 37.
Kevin semble déterminer les chiffres du quotient en commençant par une estimation forte puis en proposant un chiffre plus petit si la première estimation est trop grande. Il vérifie donc que « 7 fois 37 ça tient », sans se demander « si 8 fois 37 ça tient ».